Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava, šk.g. 2004/05

NIZOVI. REKURENTNE JEDNAČINE. PRIMENA

Razni zadaci

Školski zadaci

1. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_0 = 0$.

2. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+1} = 3x_n + n - 1$, $x_1 = 1$.

3. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+1} = 3x_n + 2^n$, $x_1 = 1$.

4. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_n + n^2 = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_1 = 1, x_2 = 5$.

5. Rešiti rekurentnu jednačinu
(a) $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 4$;
(b) $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = -2$.

6. Rešiti rekurentnu jednačinu
(a) $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$, $x_0 = 5$, $x_1 = -1$;
(b) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$.

7. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$.

8. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 2$, $x_0 = 4$, $x_1 = 0$.

9. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 18n + 4(-1)^n$, $x_0 = 4$, $x_1 = 0$.

10. Rešiti rekurentnu jednačinu
$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^{n+1}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

11. Rešiti sistem rekurentnih jednačina
(a) $x_{n+1} = 2x_n + y_n$, $x_0 = 0$,
$y_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_0 = 2$;
(b) $x_{n+1} = 3x_n - 4y_n$, $x_0 = 1$,
$y_{n+1} = x_n - 2y_n$, $y_0 = 2$;
(c) $x_{n+1} = 3x_n - 2y_n$, $x_0 = 1$,
$y_{n+1} = 2x_n - y_n$, $y_0 = 0$;
(d) $x_{n+1} = 2x_n - y_n$, $x_0 = 2$,
$y_{n+1} = x_n + 4y_n$, $y_0 = 1$.

12. Rešiti rekurentnu jednačinu
(a) $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{3x_n - 4}$, $x_0 = 0$;
(b) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{2x_n - 2}$, $x_0 = 7$;
(c) $x_{n+1} = \dfrac{3x_n - 1}{x_n + 1}$, $x_0 = 6$;
(d) $x_{n+1} = \dfrac{4x_n - 7}{4x_n + 2}$, $x_0 = \dfrac{3}{4}$;
(e) $x_{n+1} = \dfrac{6x_n - 1}{x_n + 4}$, $x_0 = 0$.

Teži zadaci

1. Rešiti rekurentnu jednačinu
(a) $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 1}$, $x_0 = 1$;
(b) $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$, $x_0 = 0$.

2. Niz x_n je rešenje rekurentne jednačine

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 12,\ x_3 = 20.$$

Dokazati da je $1 + 4x_n x_{n+1}$ potpun kvadrat za svako n.

3. Niz x_n zadat je sa

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1;\ x_n = \frac{1 + x_{n-1}x_{n-2}}{x_{n-3}}.$$

Dokazati da su svi njegovi članovi prirodni brojevi.

4. (Mala olimpijada 1980) Niz x_n je rešenje rekurentne jednačine

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + c}{x_n}.$$

Ako su x_0, x_1 i $\frac{x_0^2 + x_1^2 + c}{x_0 x_1}$ prirodni brojevi, dokazati da su svi članovi niza x_n prirodni brojevi.

5. (Mala olimpijada 2005) Dat je niz $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ i $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ za $n \geq 1$. Naći sve prirodne brojeve m, takve da je broj $3x_n^2 + m$ potpun kvadrat za sve prirodne brojeve n.

6. (Mala olimpijada 2005) Koliko ima 100-cifrenih prirodnih brojeva u čijem se dekadnom zapisu pojavljuje samo neparne cifre, pri čemu je razlika svake dve susedne cifre jednaka 2.

7. (IMO 1988, predlog) Neka je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Dokazati da je $2^k \mid a_n \Leftrightarrow 2^k \mid n$.

8. Niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ zadat je sa $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 1$. Dokazati da je svaki član ovog niza potpun kvadrat.

9. Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$.

10. (Putnam 1999) Niz $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definisan je sa $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$, i za svako $n \geq 4$,

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

11. (Savezno 2003, 3.raz) Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $[(5 + \sqrt{35})^{2n-1}]$ deljiv sa 10^n.

12. (Kvant M463.) Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ prirodni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < mn$. Dokazati da se u poslednjoj jednakosti mogu precrtati neki sabirci tako da jednakost ostane na snazi.

13. (Kvant M730.) Niz je zadat sa $a_1 = 0$ i $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$.
(a) Naći prvih 20 članova i a_{1982}.
(b) Dokazati da se svaki broj nalazi u nizu 2 ili 4 puta. Koliko se puta u nizu nalazi 2^k?
(c) Dokazati da je $a_n - a_{n-1} = 1$ ako u pretstavljanju broja n na proste delioce 2 učestvuje na neparan stepen, a $a_n - a_{n-1} = 0$ u suprotnom.
(d) Dokazati da za beskonačno mnogo n važi $a_n = n/3$.
(e) Da li postoji n takav da je $|a_n - n| > 1982$.
(f) Dokazati da je $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 1/3$.

14. (Mala olimpijada 1990) Niz (a_n) dat je relacijom $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2 + 8$, $n \in \mathbf{N}$, uz početne uslove $a_1 = 4$, $a_2 = 6$. Dokazati da je broj $9a_n^2 - 128$ kvadrat racionalnog broja za svako $n \in \mathbf{N}$.

15. (Mala olimpijada 1996) Dat je niz (x_n) formulom

$$x_n = \frac{1}{4}\Big\{(2 + \sqrt{3})^{2n-1} + (2 - \sqrt{3})^{2n-1}\Big\}.$$

Dokazati da je svaki član niza (x_n) prirodan broj koji se može prikazati kao zbir kvadrata dva uzastopna cela broja.

16. (IMO 1994, predlog) Neka je $a_0 = 1994$ i $a_{n+1} = a_n^2/(a_n+1)$ za sve nenegativne cele n. Dokazati da je $1994 - n$ ceo deo broja a_n za $0 \leq n \leq 998$.

17. (IMO 1996, predlog) Neka je $a > 2$ realan broj, i definišimo niz

$$a_0 = 1,\ a_1 = a,\ a_{n+1} = \Big(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\Big).$$

Dokazati da je za svaki prirodan broj k važi

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2-4}).$$

18. (Bugarska 1996) Dokazati da za svaki prirodna broj $n \geq 3$ postoje neparni prirodni brojevi x_n, y_n takvi da je $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.
(**Dodatak:** naći broj rešenja ove jednačine!)

19. (Bugarska 1996) Niz (a_n) je definisan sa $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$ za $n \geq 1$. Dokazati da je za svaki prirodan broj $n \geq 4$, $[a_n^2] = n$.

20. (Austro-Poljska 1996) Niz polinomi $P_n(x)$ definisan je sa $P_0(x) = 0, P_1(x) = x$ i $P_n(x) = xP_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x)$ za $n \geq 2$. Naći sve korene polinoma P_n.

21. Neka su $a_1, a_2, \ldots$ nenegativni celi brojevi za koje je $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ za sve prirodne brojeve n, m. Dokazati da je

$$a_n \leq ma_1 + \Big(\frac{n}{m} - 1\Big)a_m.$$

22. (Tajvan 1997) Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka niz brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadovoljava $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$ za neki ceo broj k_i. Dokazati da je $2n \leq \sum k_i \leq 3n$.

23. (Mala Olimpijada 2002) Niz (a_n) odredjen je uslovom $x_2 = 1, x_3 = 1$ i

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2-n-1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \ \text{ za } \ n \geq 3.$$

Dokazati da je x_n ceo broj ako i samo ako je n prost broj.

24. (Balkanijada 2002) Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, takve da je za svako $n \in \mathbf{N}$

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002.$$

25. (Balkanijada 2002) Niz (a_n) definisan je sa

$$a_1 = 20,\ a_2 = 30,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,\ \text{za } n \geq 1.$$

Naći sve prirodne brojeve n za koje je $1 + 5a_n a_{n+1}$ potpun kvadrat.

26. (Savezno 2004, 4.raz) Niz (a_n) odredjen je sa $a_1 = 0$ i

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \text{ za } n \geq 1.$$

Dokazati da beskonačno mnogo članova niza pripada skupu prirodnih brojeva.

27. (Rumunija 1999) Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj

$$S_n = \binom{2n+1}{0}2^{2n} + \binom{2n+1}{2}2^{2n-2}\cdot 3 + \ldots + \binom{2n+1}{2n}3^n$$

jednak zbiru dva uzastopna kvadrata.

28. Niz prirodnih brojeva (a_n) definisan je sa $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ i

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Dokazati da je a_n neparan.

29. (Rumunija 2004) Neka su m i n prirodni brojevi i neka je m neparan. Dokazati da je broj

$$a_m = \frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k,$$

ceo za svaki prirodan broj m.

30. (Vijetnam 1988) Nema su a, b celi brojevi. Neka je niz (a_n) definisan sa $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = 2b - a + 2$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. Naći opšti član niza i naći a, b takve da je broj a_n potpun kvadarta za $n \geq 1988$.

31. (IMO 1983, predlog) Neka je a prirodan broj i (a_n) niz definisan sa:

$$a_0 = 0, \ a_{n+1} = a(a_n + 1) + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}.$$

Dokazati da je za sve prirodne brojeve n, i a_n prirodan.

32. (IMO 1984, predlog) Naći sve nizove $a_1, a_2, \ldots$ takve da je $a_1 = 1$ i

$$|a_m - a_n| \leq \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

za svaka dva prirodna broja m i n.

33. (IMO 1984, predlog) Neka su (a_n) i (b_n) dva niza prirodnih brojeva takvih da je $a_{n+1} = na_n + 1$, i $b_{n+1} = nb_n - 1$ za svako $n \geq 1$. Dokazati da ova dva niza mogu imati najviše konačno mnogo jednakih elemenata.

34. (BMO 1996, 4.zad) Dokazati da postoji podskup A skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1$ koji ima sledeća svojstva:
(a) $1 \in A$ i $2^{1996} - 1 \in A$;
(b)svaki element iz $A \setminus \{1\}$ je zbir dva (ne obavezno različita) elementa iz A;
(c) A nema više od 2012 elemenata.

35. (IMO 1998, predlog) Karte numerisane brojevima od 1 do 9 poredjane su u nekom poredku u niz. U jednom koraku može se uzeti bilo koji blok uzastopnih karata, čiji su brojevi u rastućem ili opadajućem poredku, i okrenu ti ga. Na primer niz 916542748 može se zameniti nizom 914562748. Dokazati da se u najviše 12 koraka karte mogu urediti tako da su u rastućem ili opadajućem poredku.

36. (Savezno 2000, 2.raz) Koliko ima nizova $x_1 x_2 \ldots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cifre iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$, takvih da za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ važi

$$x_i x_{i+1} \notin \{12, 13, 32, 32\}?$$

37. (Savezno 2000, 4.raz) Dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n + 1.$$

38. (Savezno 2001, 4.raz) Neka je k prirodan broj i N_k broj nizova dužine 2001 čiji su svi članovi elementi skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 2k+1\}$, a neparan broj članova svakog niaz jednak je 0. Odrediti najveći stepen dvojke koji deli N_k.

39. (Savezno 2004, 4.raz) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.Koliko ima podsupova B skupa A, takvih daza svako $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ važi: ako $n \in B$ i $n + 2 \in B$, onda bar jedan od brojeva $n + 1$ i $n + 3$ takodje pripada skupu B?

40. Naći broj binarnih nizova dužine n koji ne sadrže podniz 010.

radmarko@yahoo.com
2005